Analysis

Funktionenscharen

Kurven-Scharen

Spezialthemen
(dargestellt an Parabelfunktionen):

Grundaufgaben

(A) Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit vom Parameter
(B) Ortskurven von Punkten
(C) Gemeinsame Punkte einer Schar
(D) Welche Scharkurve geht durch einen gegebenen Punkt Q

Datei Nr. 42060

Stand 6. März 2019

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik

www.mathe-cd.de

Vorwort

In diesem Text stelle ich die vier wichtigsten Grundaufgaben vor, die bei Funktionenscharen bzw. Kurvenscharen gestellt werden. Ich beziehe mich hier auf quadratische Funktionen (Parabelfunktionen). Für andere ganzrationale Funktionen gibt es einen Beispieltext.
Die Methoden werden hier besprochen.

Inhalt

Funktionenscharen - Beispiele

Die Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-2$

hat als Schaubild eine Parabel, deren Gleichung man so schreibt: $y=\frac{1}{2}x^2+2x-2$.

Allgemein lautet die die Gleichung einer ganzrationalen Funktion 2. Grades (Parabelfunktion) so:

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$$

Diese Gleichung enthält drei „Koeffizienten“: a, b und c.

In obigem Beispiel ist $a=\frac{1}{2}$, $b=2$ und $c=-2$.

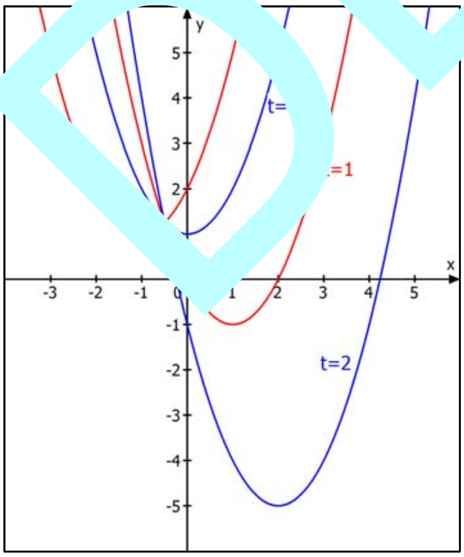
Verwendet man für diese Koeffizienten einen oder mehrere Parameter[illegible]e Gleichung eine **Funktionenschar** dar: $f_t(x)=x^2-2tx+(1-t)$ mit $t\in\mathbb{R}$

Man erkennt, dass man unbedingt den Definitionsbereich für t ange[illegible]n muss, damit klar [illegible]welche Werte von t eingesetzt werden dürfen. Für jeden zugelassenen We[illegible]rhält man dann eine[illegible]ue Funktion:

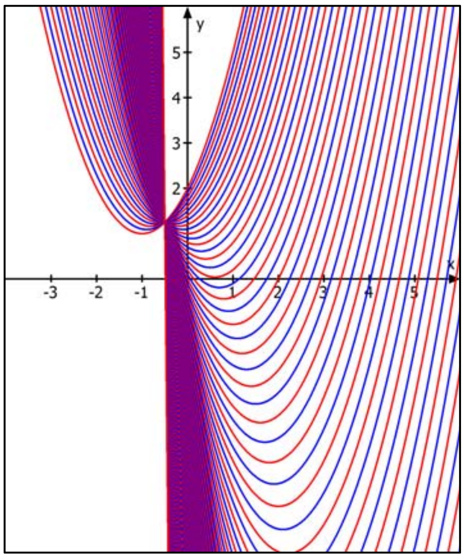
t	$b=-2t$	$c=1-t$	führe[illegible]en Glei[illegible]
1	-2	0	$y=$ [illegible] $2x$
0	0	1	[illegible] $=x^2$
-1	2	2	$y=$ [illegible] $^2+2x+$ [illegible]
2	-4	1	[illegible] $=$ [illegible] $-4x-1$
$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$y=$ [illegible] $x+\frac{1}{2}$
$\sqrt{2}$	-2 [illegible]	$1-\sqrt{2}$	[illegible] $=x^2-2\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}$

Die Abbildung enthält …

die ersten vier Kurven der Tab[illegible]ieser Schar.



41 Kurven dieser Schar (t von -20 bis 20)

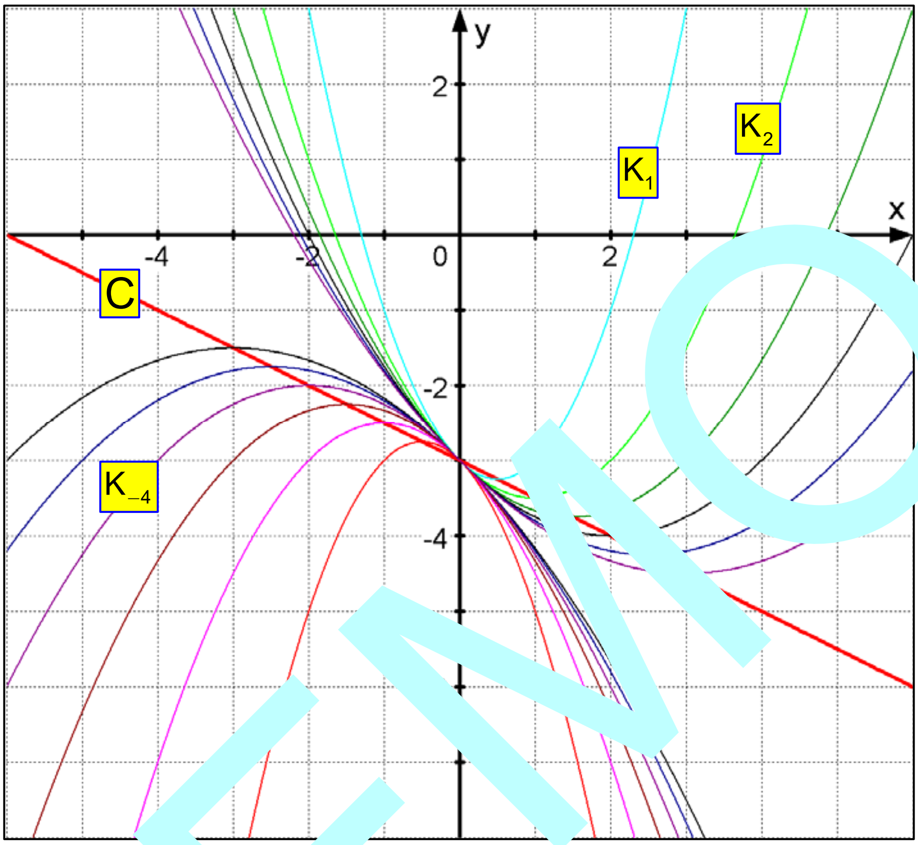


Man erkennt, dass sich dabei viele Fragen auftun: Welche Scharkurven schneiden die x-Achse? Gibt es Punkte, durch die keine Scharkurve geht? Welche geht durch einen speziellen Punkt? Auf welcher speziellen Kurve liegen die Scheitel dieser (eigentlich) unendlich vielen Scharkurven?

Noch ein Beispiel:

Die Parabelschar $y = f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - x - 3$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat völlig andere Eigenschaften. Und man muss die 0 als Parameterwert ausschließen, da t im Nenner steht.

Hier 12 spezielle Scharkurven:



Was gi… ier an Bes… erheiten zu entdecken:

(1) Die …eitel der v… argeste… Pa… eln liegen auf einer Geraden C.
… nennt sie die ***Or… rve der … neitel***.

(2) Al… rabeln gehen dur… einen Punkt G (0 I -3).

(3) Drei diese… rabeln … neiden die x-Achse zweimal. Die Parabel K_{-2} tut dies nicht.
Wie kann ma… usfinden, welche Parabeln zwei, eine oder keine Schnittpunkte mit der x-Achse haben?

usw.

1. Grundaufgabe: Das Nullstellenproblem

Wie wir auf Seite 3 gesehen haben, können einzelne Parabeln einer Schar die x-Achse schneiden, andere berühren sie, wieder andere schneiden sie nicht. An einigen Beispielen wird gezeigt, wie man dies beurteilen kann.

Beispiel 1 $y = f_t(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4x + t$ für $t \in \mathbb{R}$

Bedingung für Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - 4x + t = 0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-t}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(4 \pm \sqrt{16-t}\right) = 8 \pm 4\sqrt{16-t}$$

Grundsätzliches über die Lösun…

Ist der Radikand positiv, erhält man genau … ösungen.

Ist der Radikand Null, erhält man genau … ne Lösung.

Ist der Radikand negativ, gibt es keine … elle) Lösung.

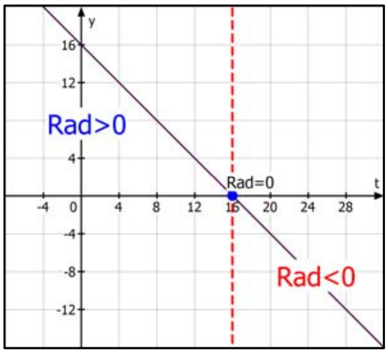
	Rad > 0:	Rad …	Rad …
(*)	$16 - t > 0$	$16 - t <$ …	… – 0
•	$t < 16$	$t >$ …	$t = 16$

Es gibt noch eine zweite Methode:

Den Term $16 - t$ kann man graphisch … er Fu… = 16 … darstellen.
Das ergibt dann eine (weg… er Steigung … fallende … mit der Nullstelle t = 16.
Also liegen ihre (Radik… en-)Werte

links von 16 … der t-Achs…

rechts von 1… ter der t… hse.



Folgerun…

Fü… 16 ist Rad … ⇒ 2 … von f_t.

…r $t > 16$ ist Rad < 0 … keine …ullstellen.

F… = 16 ist Rad $= 0$ … genau 1 Nullstelle: f_{16}.

Die Lösung wird komplizierter, wenn der **Radikand ein quadratischer Term** ist, denn dann ist eine **quadratische Ungleichung** zu lösen, und dazu fehlt meist die Routine oder das Wissen.
Es gibt jedoch eine einheitliche Methode für alle quadratischen Ungleichung, die graphische Methode, die wir soeben in einfacher Form mit der Geraden gesehen haben.

Dazu nun vier Beispiele.

Beispiel 2:

$f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - x - 3$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

<u>Bedingung für Schnittpunkte mit der x-Achse</u> ist $f_t(x) = 0$ bzw. $y = 0$
(weshalb man die x-Koordinaten dieser Schnittpunkte auch Nullstellen nennt).

$$\tfrac{1}{t}x^2 - x - 3 = 0 \quad | \cdot t$$

$$x^2 - tx - 3t = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 12t}}{2}$$

Vorzeichenuntersuchung für den Radikanden $\text{Rad} = t^2 + 12t$:

Graphisches Verfahren: (Empfohlene Darstellung:)

Die Hilfsfunktion $r(t) = t^2 + 12t$ hat als Schaubild eine nach oben geöffnete Parabel.

Sie hat diese Nullstellen: $t(t+12) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 0,\ t_2 = -12$

Also hat der Radikand zwischen diesen Nullstellen negative Werte, außen positive.

Ergebnis:
- Für $-12 < t < 0$ ist der Radikand negativ: Keine Nullstellen.
- Für $t < -12$ oder $t > 0$ ist der Radikand positiv: Zwei Nullstellen
- Für $t_1 = 0,\ t_2 = -12$ ist der Radikand Null: Je eine Nullstelle.

Beispiel 3:

$f_t(x) = \frac{1}{4}x^2 - tx + 4$ für $t \in \mathbb{R}$

<u>Bedingung für Nullstellen:</u> $f_t(x) = 0$ d.h. $\frac{1}{4}x^2 - tx + 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot \left(t \pm \sqrt{t^2 - 4}\right) = 2t \pm 2\sqrt{t^2 - 4}$$

Vorzeichenuntersuchung für den Radikanden $\text{Rad} = t^2 - 4$:

Graphisches Verfahren: (Empfohlene Darstellung:)

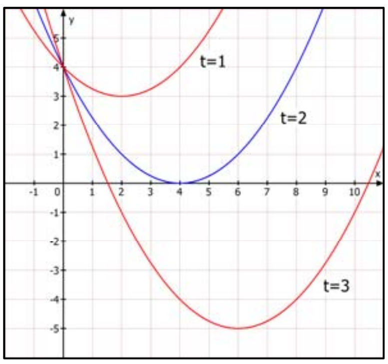
Die Hilfsfunktion $r(t) = t^2 - 4$ hat als Schaubild eine nach oben geöffnete Parabel.

Sie hat diese Nullstellen: $t^2 = 4 \Leftrightarrow t = \pm 2$

Also hat der Radikand zwischen diesen Nullstellen negative Werte, außen positive.

Ergebnis:
- Für $-2 < t < 2$ ist der Radikand negativ: Keine Nullstellen.
- Für $t < -2$ oder $t > 2$ ist der Radikand positiv: Zwei Nullstellen
- Für $t_1 = -2,\ t_2 = 2$ ist der Radikand Null: Je eine Nullstelle.

Die Abbildung zeigt dazu den Verlauf dreier Scharkurven:



$t = 1$: $f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 4$ keine Nullstellen.

$t = 2$: $f_2(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$ eine Nullstelle.

$t = 3$; $f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 4$ zwei Nullstellen.

Beispiel 4:

$f_t(x) = x^2 + tx + t - 4$ für $t \in \mathbb{R}$

Bedingung für Nullstellen: $f_t(x) = 0$ d.h. $x^2 + tx + (t-4) = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 - 4(t-4)}}{2} = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 - 4t + 16}}{2}$$

Vorzeichenuntersuchung für den Radikanden $Rad = t^2 - 4t + 16$:

Graphisches Verfahren: (Empfohlene Darstellung:)

Die Hilfsfunktion $r(t) = t^2 - 4t + 16$ hat als Schaubild eine nach oben geöffnete Parabel.

Sie hat keine Nullstellen: $t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 48}}{2} \notin \mathbb{R}$

Daher verläuft diese Hilfsparabel ganz im positiven Bereich (oberhalb der t-Achse).

Also hat der Radikand stets positive Werte

Ergebnis: Jede Scharkurve hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse.

Beispiel 5:

$f_t(x) = \frac{1}{2}tx^2 + 2t - 4$ für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Nullstellenbedingung: $\frac{1}{2}tx^2 + 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}tx^2 = 4 - 2t \Leftrightarrow x^2 = (4-2t) \cdot \frac{2}{t} = \frac{8-4t}{t}$

$$x_N = \pm\sqrt{\frac{8-4t}{t}} = \pm\sqrt{\frac{4(2-t)}{t}} = \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{2-t}{t}}$$

METHODE: Vorzeichenuntersuchung des Radikanden durch eine **Vorzeichentabelle**.

Man trägt zuerst die Nullstellen von Zähler und Nenner ein, also 0 und 2. Dann die Vorzeichen + und - von Zähler und Nenner.
In der dritten Zeile dann die Vorzeichen des Bruches

		0		2		t
$2-t$	+		+	0	−	
t	−	0	+		+	
Rad	−		+		−	

Ergebnis: $t < 0$ oder $t > 2$: Radikand negativ Keine Nullstellen

$0 < t < 2$ Radikand positiv Zwei Nullstellen.

$t_2 = 2$ Radikand Null: Eine Nullstelle

$t = 0$ ist ausgeschlossen, dafür liegt keine Parabel vor.

Trainingsaufgabe 1

Bestimme die Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von t bei diesen Funktionen:

a) $f_t(x) = x^2 + 2x + \frac{1}{2}t$, $t \in \mathbb{R}$,

b) $f_t(x) = \frac{1}{2}x^2 - tx + 3t$, $t \in \mathbb{R}$

c) $f_t(x) = x^2 + 3tx - 4t^2$, $t \in \mathbb{R}$

d) $f_t(x) = x^2 + tx + t - 1$

Lösungen am Textende.

2. Grundaufgabe: Das Ortskurvenproblem

Punkte, deren Koordinaten von einem Parameter z. B. t abhängen, haben meist die Eigenschaft, auf einer Kurve zu liegen, die man **Ortskurve** oder auch **geometrischer Ort** oder **Trägerkurve** nennt.

Ich zeige zunächst am Beispiel zweier Parabelscharen, wie man die Ortskurve ihrer Scheitel bestimmt. Dann folgt eine Übersicht über verschiedene Methoden zur Berechnung ihrer Gleichungen.

Beispiel 1: $y = f_t(x) = \frac{1}{t}x^2 - x - 3$ mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

usw. auf der Mathe-CD …